

POLITECHNIKA



BIAŁOSTOCKA

WYDZIAŁ



**INŻYNIERII
ZARZĄDZANIA**

KATEDRA ZARZĄDZANIA PRODUKCJĄ

Instrukcja do zajęć laboratoryjnych z przedmiotu:

FIZYKA

Kod przedmiotu: IS01137

Ćwiczenie Nr 1

**Wyznaczanie modułu Younga metodą
zginania pręta**

Autor:

dr inż. Krzysztof Kamil Żur

dr inż. Wojciech Jarmoc

mgr inż. Patrycja Rogowska

Białystok 2019

Wszystkie prawa zastrzeżone

Wszystkie nazwy handlowe i towarów występujące w niniejszej instrukcji są znakami towarowymi zastrzeżonymi lub nazwami zastrzeżonymi odpowiednich firm odnoszących się do nich.

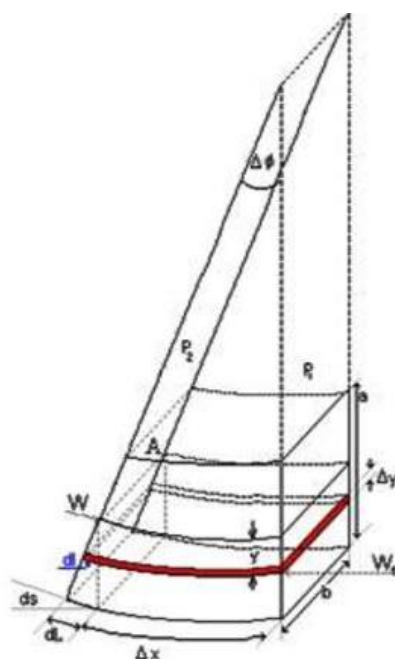
1. Podstawy teoretyczne

Pręt umocowany na końcach pod wpływem własnego ciężaru lub pod obciążeniem ulega wygięciu. W górnej warstwie pręta następuje ścisnięcie, a w dolnej rozciąganie materiału pręta. Cienka warstwa środkowa nie ulega ani ścisnaniu ani rozciąganiu i tworzy warstwę "obojętną". Przy dostatecznie małym obciążeniu, wydłużenia dolnej warstwy i ścisnięcia górnej podlegają prawu **Hooke'a**.



Rys.1. Wygięty pręt umocowany na końcach

Załóżmy, że pręt nieobciążony nie ulega ugięciu. Strzałka ugięcia λ powstaje pod wpływem obciążenia zewnętrznego. Weźmy pod uwagę element ΔV pręta odległy o x od jego środka (rys.1). Przed obciążeniem powierzchnie przekroju pręta wycinające element ΔV są równoległe, po obciążeniu i ugięciu pręta tworzą kąt $\Delta\phi$. Przez punkt **A** należący do płaszczyzny przekroju **P₂** i warstwy neutralnej **W** prowadzimy powierzchnię równoległą do powierzchni przekroju **P₁**. Odległość między tymi płaszczyznami wynosi Δx (rys. 2).



Rys. 2. Wycinek wygiętego pręta umocowanego na końcach z zaznaczoną warstwą „obojętną”

W wyniku ugięcia warstwa W_1 odległa o y od warstwy neutralnej W ulega wydłużeniu o $\Delta\phi y$. Weźmy pod uwagę element pręta o wymiarach: $\Delta V' = \Delta x \Delta y b$ odległy o y od warstwy neutralnej W . Przekrój jego powierzchni prostopadłej do długości pręta wynosi $b \Delta y$.

Prawo Hooke'a ($F = -kx$) można zapisać w równoważnej postaci:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}, \quad (1.1)$$

gdzie:

\mathbf{F} - siła działająca prostopadle do powierzchni S ,

$\frac{\Delta l}{l}$ - wydłużenie względne

E - moduł Younga.

Siła powodująca odkształcenie pręta ma postać:

$$F = ES \frac{\Delta l}{l}. \quad (1.2)$$

W naszym przypadku powierzchnia elementu ΔV , na który działa siła odkształcająca ΔF wyraża równanie:

$$\Delta S = b \Delta y. \quad (1.3)$$

Odpowiednio wydłużenie względne oraz siłę odkształcającą można zapisać w postaci:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{y \Delta \phi}{\Delta x}, \quad (1.4a)$$

$$\Delta F = Eby \frac{\Delta \phi}{\Delta x} \Delta y. \quad (1.4b)$$

Moment siły odkształcającej względem warstwy \mathbf{W} wynosi:

$$\Delta M = \Delta F y = Eby^2 \frac{\Delta \phi}{\Delta x} \Delta y. \quad (1.5)$$

Elementarny moment skręcający oraz całkowity moment skręcający wywołany siłami sprężystymi ma odpowiednio postać:

$$dM = dF y = Eby^2 \frac{d\phi}{dx} dy, \quad (1.6a)$$

$$M = Eb \frac{\Delta \phi}{\Delta x} \int_{-al/2}^{al/2} y^2 dy \Rightarrow M = Eb \frac{d\phi}{dx} \frac{1}{12} a^3. \quad (1.6b)$$

Siła \mathbf{F} powodująca zginanie pręta zaczepiona jest w jego środku. Zgodnie z zasadami rozkładania sił działających na ciało sztywne można ją zastąpić dwiema siłami o wartości $\mathbf{F}/2$ przyczepionymi do końców pręta działających zginająco ku górze, wówczas punkt końca

strzałki ugięcia można traktować, jako minimalny. Moment siły odpowiedzialny za odkształcenie pręta pochodzi od siły zewnętrznej. Dla dowolnej odległości x od środka pręta otrzymujemy:

$$M = \frac{F}{2} x. \quad (1.7)$$

Oba momenty sił są sobie równe można, więc zapisać:

$$\frac{F}{2} x = \frac{1}{12} E b a^3 \frac{d\phi}{dx}. \quad (1.8)$$

Łatwo zauważyć, że stosunek strzałki ugięcia $d\lambda$ do odległości od środka x ma postać:

$$\frac{d\lambda}{x} = d\phi. \quad (1.9)$$

Po podstawieniu otrzymujemy wyrażenie:

$$\frac{F}{2} x^2 = \frac{1}{12} E b a^3 \frac{d\lambda}{dx}, \quad (1.10)$$

a następnie wzór na elementarną strzałkę ugięcia:

$$d\lambda = \frac{6F}{E b a^3} x^2 dx. \quad (1.11)$$

Całkowitą strzałkę ugięcia wyraża całka oznaczona:

$$\lambda = \frac{6F}{E b a^3} \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dx \Rightarrow \lambda = \frac{F l^3}{4 E b a^3}. \quad (1.12)$$

Moduł Younga E wyznaczony przez pomiar strzałki ugięcia wyrażony jest wzorem:

$$E = \frac{F l^3}{4 \lambda b a^3} \quad (1.13)$$

gdzie:

- F** – siła odkształcająca [N],
- l** – długość płaskownika [m],
- b** – szerokość płaskownika [m],
- a** – grubość płaskownika [m],
- λ** – strzałka ugięcia [m].

2. Cel i zakres ćwiczenia laboratoryjnego

Celem ćwiczenia jest zapoznanie studentów z metodą wyznaczenia modułu Younga dla płaskowników wykonanych z różnych materiałów (stal, aluminium, miedź) oraz porównanie wartości obliczonych z wartościami tablicowymi.

Zakres ćwiczenia dotyczy pomiaru wielkości geometrycznych płaskowników, przygotowanie stanowiska pomiarowego wg instrukcji oraz stopniowe obciążanie płaskowników i odczytywanie ich strzałki ugięcia z czujnika mikrometrycznego. Dane pomiarowe należy wykorzystać do analitycznego wyznaczenia modułu Younga korzystając ze wzoru (1.13).

3. Metodyka badań

3.1 Opis stanowiska badawczego

Urządzenie do pomiaru modułu Younga metodą ugięcia pręta zbudowane jest na bazie dwóch podpór (złożonych z prętów osadzonych w żeliwnych podstawach, z możliwością regulacji poziomu) połączonych belką poprzeczną oraz z wymiennych prętów stalowych o przekroju prostokątnym, wykonanych z różnych materiałów (pośrodku których zawieszamy obciążenie).

Strzałkę ugięcia mierzymy przy pomocy odpowiedniego czujnika zegarowego, którego trzpień stykamy z górną częścią strzemiączka. Czujnik montowany jest na belce łączącej obie podpory (rys. 3).



Rys. 3. Stanowisko do wyznaczenia modułu Younga metodą zginania pręta

W skład zestawu wchodzi następujące elementy:

- statyw z belką poprzeczną i kompletem zacisków krzyżowych,
- czujnik mikrometryczny tarczowy,
- strzemiączko do podwieszania obciążenia,
- pręty płaskie stalowe, aluminiowe i miedziane,
- taśma pomiarowa,
- suwmiarka,
- komplet odważników o wadze 10g i 50g.

3.2 Przebieg realizacji eksperymentu

Przebieg doświadczenia:

1. Przygotowujemy układ według przedstawionego opisu urządzenia posiłkując się zamieszczonym zdjęciem przyrządu (płaskownik spoczywa na podporach ostrzowych osadzonych w zaciskach krzyżowych). Śruby dociskowe regulujemy przy użyciu załączonego klucza płaskiego.
2. Trzykrotnie dokonujemy pomiaru odstępów między środkami podpór l oraz grubości a i szerokości b badanego pręta, w różnych jego miejscach. Obliczamy wartości średnie.
3. Korzystając z załączonych odważników, obciążamy badany płaskownik w zależności od jego właściwości mechanicznych (od 0 do max. 405 g) i dokonujemy pomiaru strzałki ugięcia, uwzględniając masę uchwytu (pręta – 25g) do podwieszania odważników oraz strzemiączka.
4. Powtarzamy pomiary analogicznie, zmniejszając obciążenie.
5. Sporządzamy wykres zależności $\lambda = f(m)$, gdzie: λ – strzałka ugięcia, m - masa szalki, strzemiączka i obciążników.
6. Powtarzamy pomiary z punktów 2 do 4 dla innych płaskowników.
7. Obliczamy moduł Younga dla zastosowanych materiałów (stal, aluminium, miedź), korzystając ze wzoru (1.13)
8. Wyznaczamy błąd maksymalny metodą pochodnej logarytmicznej i analizujemy przyczyny jego powstania.
9. Opracowujemy wnioski.
10. Otrzymane wartości E dla badanych materiałów porównujemy z wartościami tablicowymi.

3.3 Prezentacja wyników obliczeń

Na podstawie danych w Tabeli 1, Tabeli 2 i Tabeli 3 wyznaczyć moduł Younga dla płaskowników (stal, aluminium, miedź). Skorzystać w tym celu z zależności (1.13).

Tabela 1. Dane służące do wyznaczenia modułu Younga

Material	Wymiary $a \times b$ [m]	Wymiary śr. $a_{śr} \times b_{śr}$ [m]	Siła ciężkości $F = mg$ [N]	Odległość podpór l [m]	Ugięcie λ [m]	E_{obl} [Pa]	$E_{śr}$ [Pa]
Stal	1. 2. 3.		1.	1. 2. 3. $l_{śr} =$	1.	1.	
			2.		2.	2.	
			3.		3.	3.	
			4.		4.	4.	
			5.		5.	5.	
			6.		6.	6.	
			7.		7.	7.	
Stal	1. 2. 3.		1.	1. 2. 3. $l_{śr} =$	1.	1.	
			2.		2.	2.	
			3.		3.	3.	
			4.		4.	4.	
			5.		5.	5.	
			6.		6.	6.	
			7.		7.	7.	

Tabela 2. Dane służące do wyznaczenia modułu Younga

Material	Wymiary $a \times b$ [m]	Wymiary śr. $a_{śr} \times b_{śr}$ [m]	Siła ciężkości $F = mg$ [N]	Odległość podpór l [m]	Ugięcie λ [m]	E_{obl} [Pa]	$E_{śr}$ [Pa]
Aluminium	1.		1.	1.	1.	1.	
			2.		2.	2.	
			3.		3.	3.	
	2.		4.	3.	4.	4.	
			5.	$l_{śr} =$	5.	5.	
	6.		6.		6.		
	7.		7.	7.			
Aluminium	1.		1.	1.	1.	1.	
			2.		2.	2.	
			3.		2.	3.	
	2.		4.	3.	4.	4.	
			5.	$l_{śr} =$	5.	5.	
	6.		6.		6.		
	7.		7.	7.			

Tabela 3. Dane służące do wyznaczenia modułu Younga

Material	Wymiary $a \times b$ [m]	Wymiary śr. $a_{śr} \times b_{śr}$ [m]	Siła ciężkości $F = mg$ [N]	Odległość podpór l [m]	Ugięcie λ [m]	E_{obl} [Pa]	$E_{śr}$ [Pa]
Miedź	1.		1.	1.	1.	1.	
			2.		2.	2.	
			3.		3.	3.	
	2.		4.	3.	4.	4.	
			5.	$l_{śr} =$	5.	5.	
	6.		6.		6.		
	7.		7.		7.		
Miedź	1.		1.	1.	1.	1.	
			2.		2.	2.	
			3.		3.	3.	
	2.		4.	3.	4.	4.	
			5.	$l_{śr} =$	5.	5.	
	6.		6.		6.		
	7.		7.		7.		

4. Sprawozdanie

Sprawozdanie studenckie powinno zawierać:

1. Cel i zakres ćwiczenia laboratoryjnego.
2. Część teoretyczną ważną z punktu widzenia wykonania ćwiczenia.
3. Opis stanowiska badawczego.
4. Przebieg realizacji eksperymentu.
5. Zestawienie i analiza wyników badań, tj.:
 - obliczenia modułu Younga dla zastosowanych materiałów,
 - otrzymane wartości modułu Younga porównane z wartościami tablicowymi,
 - błąd maksymalny wyznaczony metodą pochodnej logarytmicznej oraz analiza przyczyn jego powstania.
6. Wypełnione tabele pomiarowe podpisane przez prowadzącego
7. Wnioski wynikające z przeprowadzonych pomiarów.

Pytania kontrolne

1. Podaj treść prawa Hooke'a. Przedstaw wzór wraz z wyjaśnieniem oznaczeń.
2. Wyjaśnij czym jest moduł Younga. Przedstaw wzór, wyjaśnij oznaczenia, zdefiniuj jednostkę.
3. Wyjaśnij, jakie odkształcenia nazywamy sprężystymi.
4. Wyjaśnij czym jest naprężenie oraz wymień jego rodzaje.
5. Wyjaśnij czym jest strzałka ugięcia. Przedstaw wzór wraz z wyjaśnieniem oznaczeń.

Literatura

1. Niezgodziński M. (2013), *Wzory, wykresy i tablice wytrzymałościowe*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne WNT, Warszawa.
2. Jeżewski M. (1966), *Fizyka*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
3. Dryński T. (1977), *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Wymagania BHP

Warunkiem przystąpienia do praktycznej realizacji ćwiczenia jest zapoznanie się z instrukcją BHP i instrukcją przeciwpożarową oraz przestrzeganie zasad w nich zawartych. Wybrane urządzenia dostępne na stanowisku laboratoryjnym mogą posiadać instrukcje stanowiskowe. Przed rozpoczęciem pracy należy zapoznać się z instrukcjami stanowiskowymi wskazanymi przez prowadzącego.

W trakcie zajęć laboratoryjnych należy przestrzegać następujących zasad.

- Sprawdzić, czy urządzenia dostępne na stanowisku laboratoryjnym są w stanie kompletnym, nie wskazującym na fizyczne uszkodzenie.
- Sprawdzić prawidłowość połączeń urządzeń.
- Załączenie napięcia do układu pomiarowego może się odbywać po wyrażeniu zgody przez prowadzącego.

- Przyrządy pomiarowe należy ustawić w sposób zapewniający stałą obserwację, bez konieczności nachylania się nad innymi elementami układu znajdującymi się pod napięciem.
- Zabronione jest dokonywanie jakichkolwiek przełączeń oraz wymiana elementów składowych stanowiska pod napięciem.
- Zmiana konfiguracji stanowiska i połączeń w badanym układzie może się odbywać wyłącznie w porozumieniu z prowadzącym zajęcia.
- W przypadku zaniku napięcia zasilającego należy niezwłocznie wyłączyć wszystkie urządzenia.
- Stwierdzone wszelkie braki w wyposażeniu stanowiska oraz nieprawidłowości w funkcjonowaniu sprzętu należy przekazywać prowadzącemu zajęcia.
- Zabrania się samodzielnego włączania, manipulowania i korzystania z urządzeń nie należących do danego ćwiczenia.
- W przypadku wystąpienia porażenia prądem elektrycznym należy niezwłocznie wyłączyć zasilanie stanowisk laboratoryjnych za pomocą wyłącznika bezpieczeństwa, dostępnego na każdej tablicy rozdzielczej w laboratorium. Przed odłączeniem napięcia nie dotykać porażonego.